Faculté des Sciences de Tétouan
Département de Mathématiques et Informatique

Second Semestre 2008/2009
SMA2/SMI2 Mathématiques 2 - Algèbre 2

Feuille d'exercices n°2

Applications Linéaires et Matrices

Exercice 1. Parmi les applications f de E vers F suivantes, quelles sont celles qui sont linéaires ?

1. $E = F = \mathbb{K}^2$, $f(x,y) = (y,x)$.
2. $E = F = \mathbb{K}^2$, $f(x,y) = (xy, x-y)$.
3. $E = \mathbb{K}^3$, $F = \mathbb{K}^2$, $f(x,y,z) = (x+zy, 5y)$. $\to (x+z, 5y)$
4. $E = F = C(\mathbb{R})$, $f(\varphi) = \psi$ où $\psi(x) = \int_0^x \varphi(t)dt$.

Exercice 2. Soit l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^3$ muni de la base canonique $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$ et f l'endomorphisme de E tel que $f(e_1) = 2e_1 + e_2 - 3e_3$, $f(e_2) = e_1 - e_2 + e_3$, $f(e_3) = 0_E$.

1. Calculer l'image $f(u)$ d'un vecteur quelconque $u = (x,y,z) \in E$.
2. Trouver le noyau $\ker(f)$ et l'image $\mathrm{Im}(f)$ de f en précisant une base et la dimension de chacun de ces deux sous-espaces. Quel est le rang de f ?

Exercice 3. Soit $f : \mathbb{R}_n[X] \longrightarrow \mathbb{R}_n[X]$ l'application définie par $f(P) = P'$.

1. Montrer que l'application f est linéaire.
2. Trouver le noyau $\ker(f)$ et l'image $\mathrm{Im}(f)$ de f. Quel est le rang de f ?
3. Vérifier la formule : $\dim \mathbb{R}_n[X] = \dim \ker(f) + \dim \mathrm{Im}(f)$.

Exercice 4. Soit $f : E \longrightarrow F$ une application linéaire et $\{a_1, \ldots, a_n\}$ une famille de vecteurs de E. Montrer que

1. si $\{f(a_1), \ldots, f(a_n)\}$ engendre F et f est injective, alors $\{a_1, \ldots, a_n\}$ engendre E.
2. si $\{f(a_1), \ldots, f(a_n)\}$ est liée et f est injective, alors $\{a_1, \ldots, a_n\}$ est liée.
3. $\{f(a_1), \ldots, f(a_n)\}$ est libre $\Longleftrightarrow$ $\{a_1, \ldots, a_n\}$ est libre et $\mathrm{Vect}\{a_1, \ldots, a_n\} \cap \ker(f) = \{0_E\}$.

Exercice 5. Soient $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow G$ deux applications linéaires.

1. Montrer que :
   (a) $\ker(f) \subseteq \ker(g \circ f)$ et $\mathrm{Im}(g \circ f) \subseteq \mathrm{Im}(g)$.
   (b) $g \circ f = 0 \Longleftrightarrow \mathrm{Im}(f) \subseteq \ker(f)$.
   (c) Si $E = F = G$ et f et g commutent, alors $f(\ker(g)) \subseteq \ker(g)$ et $f(\mathrm{Im}(g)) \subseteq \mathrm{Im}(g)$.
2. Soit f un endomorphisme de E tel que $f^2 + f + \mathrm{id}_E = 0$. Montrer que f est un automorphisme et déterminer f^{-1}.

Exercice 6. Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on considère la matrice $A_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$.

1. Montrer que $A_{\theta_1} \cdots A_{\theta_n} = A_{\theta_1 + \cdots + \theta_n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tous $\theta_1, \ldots, \theta_n$ dans $\mathbb{R}$.
2. En déduire que, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, A_θ est inversible et donner son inverse.
3. Calculer $(A_\theta)^n$ pour tous $\theta \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{Z}$.

Exercice 7. Soit E l'ensemble des matrices $M(a,b,c) = \begin{pmatrix} a & -c & -b \\ b & a & -c \\ c & b & a \end{pmatrix}$ avec a, b, c dans $\mathbb{C}$.

1. Montrer que E est un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ dont on précisera sa dimension et une base.
2. Montrer que E est une sous-algèbre commutative de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$.

ETUSUP .com

3. Déterminer le groupe $\mathcal{U}(E)$ des éléments inversibles de E.

Exercice 8. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & & & 1 & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & 1 & & & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$.

Calculer A^2, en déduire que A est inversible et donner son inverse.

Exercice 9. Soit $E = \mathbb{R}^3$ muni de la base canonique $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ et $A = \begin{array}{cc} \begin{array}{ccc} f(e_1) & f(e_2) & f(e_3) \end{array} & \\ \begin{pmatrix} -7 & 3 & 3 \\ -6 & 2 & 3 \\ -12 & 6 & 5 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{array} \end{array}$

la matrice d'un endomorphisme f de E dans la base B.

1. Vérifier que le noyau de $f + \mathrm{id}_E$ a pour base $a_1 = (1, 0, 2)$ et $a_2 = (0, 1, -1)$.
2. Vérifier que le noyau de $f - 2\mathrm{id}_E$ a pour base $a_3 = (1, 1, 2)$.
3. Montrer que $B' = \{a_1, a_2, a_3\}$ est une base de E.
4. Ecrire la matrice de passage P de la base B à la base B' et calculer son inverse P^{-1} par la méthode de Gauss, puis par la méthode des systèmes linéaires.
5. Donner la matrice A' de f dans la nouvelle base B'.
6. Calculer $(A')^n$ et en déduire A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
7. Montrer que A est inversible et calculer son inverse A^{-1}.
8. On considère trois suites numériques (x_n), (y_n) et (z_n) telles que $\begin{cases} x_{n+1} = -7x_n + 3y_n + 3z_n \\ y_{n+1} = -6x_n + 2y_n + 3z_n \\ z_{n+1} = -12x_n + 6y_n + 5z_n \end{cases}$

   (a) On pose $X_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}$. Trouver une relation matricielle entre X_{n+1} et X_n.

   (b) En déduire les valeurs de x_n, y_n et z_n en fonction de x_0, y_0, z_0 et n.

Exercice 10. Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}_2[X]$, on pose $P_1 = 1$, $P_2 = 1 + X$, $P_3 = 1 - X^2$.

1. Montrer que (P_1, P_2, P_3) est une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}_2[X]$.
2. On définit sur $\mathbb{R}_2[X]$ l'endomorphisme u par $u(P) = (2 - X^2)P' + 2XP$.
   (a) Déterminer la matrice M de u dans la base $\mathcal{B}$.
   (b) Déterminer une base de $\ker(u)$ et une base de $\mathrm{Im}(u)$. Quel est le rang de u ?
3. Soit v l'endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$ défini par $v(P) = P - u(P)$. Déterminer $\ker(v)$. Quel est le rang de v ?
4. En déduire les solutions de l'équation différentielle $(2 - X^2)y' + (2X - 1)y = 0$, $y \in \mathbb{R}_2[X]$.

Exercice 11. Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} a & b & 0 & 0 \\ 0 & a & b & 0 \\ 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix}$.

1. Décomposer A sous forme $aI + bJ$ où I et J sont deux matrices à déterminer.
2. Montrer qu'il existe un entier k tel que $J^k = 0$.
3. En déduire A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

k

ETUSUP .com

Série 2

(a) - Soient $u = (x, y)$ et $v = (x', y') \in \mathbb{K}^2$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$.

$$\begin{aligned} f(\alpha u + \beta v) &= f(\alpha(x,y) + \beta(x',y')) \\ &= f((\alpha x, \alpha y) + (\beta x', \beta y')) \\ &= f(\alpha x + \beta x', \alpha y + \beta y') \\ &= (\alpha y + \beta y', \alpha x + \beta x') \\ &= (\alpha y, \alpha x) + (\beta y', \beta x') \\ &= \alpha (y, x) + \beta (y', x') \\ &= \alpha f(u) + \beta f(v) \end{aligned}$$

$\rightarrow$ f est linéaire.

(b) - Soient $u = (x, y)$, $\alpha \in \mathbb{K}$.

* $f(\alpha u) = f(\alpha x, \alpha y) = (\alpha^2 xy, \alpha x - \alpha y)$
* $\alpha f(u) = \alpha(xy, x - y) = (\alpha xy, \alpha(x - y))$

On remarque que : $f(\alpha u) \neq \alpha f(u)$ lorsque $\alpha \neq 1$.

$\alpha = 2$ et $u = (1, 1)$

$f(\alpha u) = f(2, 2) = (4, 0)$

$\alpha f(u) = 2 f(1, 1) = 2(1, 0) = (2, 0) \neq (4, 0)$

Autre exemple. $u = (1, 2)$, $v = (3, 1)$

$f(u + v) = f(4, 3) = (12, 1)$

$f(u) + f(v) = (2, -1) + (3, 2) = (5, 1)$

(c) - Soient $u = (x, y, z)$ et $v = (x', y', z') \in \mathbb{K}^3$, $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$

$$\begin{aligned} f(\alpha u + \beta v) &= f(\alpha(x, y, z) + \beta(x', y', z')) \\ &= f(\alpha x + \beta x', \alpha y + \beta y', \alpha z + \beta z') \\ &= ((\alpha x + \beta x') + (\alpha z + \beta z'), 5(\alpha y + \beta y')) \\ &= (\alpha x + \alpha z) + (\beta x' + \beta z'), 5\alpha y + 5\beta y') \\ &= (\alpha x + \alpha z, 5\alpha y) + (\beta x' + \beta z', 5\beta y') \\ &= \alpha (x + z, 5y) + \beta (x' + z', 5y') \\ &= \alpha f(u) + \beta f(v) \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ f est linéaire.

(d) - $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$, $\forall f, g \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

$$\begin{aligned} \mathcal{C}(\alpha f + \beta g) &= \int_0^x (\alpha f(t) + \beta g(t))\, dt \\ &= \alpha \int_0^x f(t)\, dt + \beta \int_0^x g(t)\, dt \\ &= \alpha \mathcal{C}(f) + \beta \mathcal{C}(g) \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ d'où $\mathcal{C}$ est linéaire.

Ex 2 :

(a) - Calculer d'abord l'image $f(v)$ d'un vecteur quelconque $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$

Décomposons d'abord le vecteur dans la base B.

$u = (x, y, z) = (x, 0, 0) + (0, y, 0) + (0, 0, z)$

ETUSUP .com

$= x(1,0,0) + y(0,1,0) + z(0,0,1)$

$= x e_1 + y e_2 + z e_3$

$f(u) = f(x e_1 + y e_2 + z e_3)$

$= x f(e_1) + y f(e_2) + z f(e_3)$

$= x(2e_1 + e_2 - 3e_3) + y(e_1 - e_2 + e_3)$

$= 2x e_1 + x e_2 - 3x e_3 + y e_1 + y e_2 + y e_3$

$= (2x+y) e_1 + (x-y) e_2 + (y-3x) e_3$

$= (2x+y, x-y, y-3x)$

b- $\ker(f)$?

$f(x,y,z) = (2x+y, x-y, y-3x)$

Soit $u = (x,y,z) \in \ker(f)$

alors, $f(u) = \mathbb{R}^3$.

① $2x + y = 0$

② $x - y = 0$

③ $y - 3x = 0$

② $\Rightarrow x = y$

① $\Rightarrow 2x + x = 0 \Rightarrow x = 0$ et $y = 0$

Donc : $u = (0,0,z)$

Donc $\ker(f) = \{(0,0,z) \mid z \in \mathbb{R}\}$

$= \{z(0,0,1) \mid z \in \mathbb{R}\}$

$= \text{Vect}\{\underbrace{(0,0,1)}_{e_3}\}$

est de dimension 1 et de base e_3.

c- $\text{Im}(f) = ?$

Rappel : Si $f : E \xrightarrow{\text{lin}} F$ et $B = (a_1, \dots, a_n)$ base de E, alors $\text{Im}(f) = \text{Vect}\{f(a_1), \dots, f(a_n)\}$.

D'après le cours, on a : $\text{Im}(f) = \text{Vect}\{f(e_1), f(e_2), f(e_3)\}$

$= \text{Vect}\{2e_1 + e_2 - 3e_3, e_1 - e_2 + e_3, 0_{\mathbb{R}^3}\}$

$= \text{Vect}\{2e_1 + e_2 - 3e_3, e_1 - e_2 + e_3\}$.

Montrons que : ce deux vecteurs sont linéairement indépendants.

Soit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ /

$\alpha(2e_1 + e_2 - 3e_3) + \beta(e_1 - e_2 + e_3) = 0_{\mathbb{R}^3}$

$(2\alpha + \beta) e_1 + (\alpha - \beta) e_2 + (-3\alpha + \beta) e_3 = 0_{\mathbb{R}^3}$

Or, $\{e_1, e_2, e_3\}$ est libre donc

$2\alpha + \beta = 0$

$\alpha - \beta = 0 \Rightarrow \alpha = \beta = 0$

$-3\alpha + \beta = 0$

donc $\{f(e_1), f(e_2)\}$ est libre.

ETUSUP .com

C'est une base de $\mathrm{Im} f$, d'où $\dim \mathrm{Im} f = 2$.

Rem : On vérifie bien que : $\dim E = \dim \ker(f) + \dim \mathrm{Im}(f)$

$3 = 1 + 2$.

2ème méthode :

$f(x,y,z) = (2x+y, x-y, y-3x)$

$= (2x, x, -3x) + (y, -y, y)$

$= x(2,1,-3) + y(1,-1,1)$.

On vérifie facilement que : $\{(2,1,-3),(1,-1,1)\}$ est libre.

donc est une base de $\mathrm{Im}(f)$

2)- b. Déterminons $\ker(f)$

$\ker(f) = \{P \in \mathbb{R}_n[x] \,/\, P' = 0\}$

$P = a_0 + a_1 X + \dots + a_n X^n$

$P' = a_1 + 2a_2 X + 3a_3 X^2 + \dots + n a_n X^{n-1}$

$P' = 0 \Leftrightarrow a_1 = 0, 2a_2 = 0, \dots, n a_n = 0$.

$\Leftrightarrow a_1 = a_2 = \dots = a_n = 0$.

$\Leftrightarrow P = a_0$.

donc $\ker(f)$ est l'ensemble de tous les polynômes constantes.

$\ker f = \{a_0 / a_0 \in \mathbb{R}\} = \{a_0 . 1 / a_0 \in \mathbb{R}\} = \mathrm{Vect}\{1\}$.

donc 1 est une base de $\ker(f)$ et $\dim \ker(f) = 1$.

c- $\mathrm{Im}(f) = \{f(P) / P \in \mathbb{R}_n[x]\}$

$= \{P' / P \in \mathbb{R}_n[x]\}$

$= \{a_1 + (2a_2) X + \dots + (n a_n) X^{n-1} / \text{les } a_i \in \mathbb{R}\}$

$= \{a_1' + a_2' X + \dots + a_n' X^{n-1} / \text{les } a_i' \in \mathbb{R}\}$.

$= \mathbb{R}_{n-1}[x]$

Une base de $\mathbb{R}_{n-1}[x]$ est $\{1, x, \dots, x^{n-1}\}$. et $\dim = n$.

On a : $\dim \mathbb{R}_n[x] = \underbrace{\dim \ker(f)}_{1} + \underbrace{\dim \mathrm{Im}(f)}_{n} = 1 + n$

Ex 4) Soit $\alpha_1, \dots, \alpha_p \in \mathbb{K}$, tel que.

$\alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_p a_p = 0_E$

alors $f(\alpha_1 . a_1 + \dots + \alpha_p . a_p) = f(0_E) = 0_F$

donc $\alpha_1 . f(a_1) + \dots + \alpha_p . f(a_p) = 0_F$

Or $\{f(a_1), \dots, f(a_p)\}$ est libre.

Alors $\alpha_1 = \dots = \alpha_p = 0$

1- Soit $x \in E$

$\exists ?\ \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K} / x = \alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_n a_n$

$f(x) \in F$, comme $\{f(a_1), \dots, f(a_n)\}$ engendre F.

alors $\exists\, \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$, $f(x) = \lambda_1 f(a_1) + \dots + \lambda_n f(a_n)$

f est linéaire $\Rightarrow f(x) = f(\lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_n a_n)$

et f injective donc $x = \lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_n a_n$

donc $\{a_1, \dots, a_n\}$ engendre E.

ETUSUP .com

(2) $\{f(a_1), \dots, f(a_n)\}$ est liée, veut dire qu'il existe des scalaires $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ non tous nuls, tel que :

$\alpha_1 f(a_1) + \dots + \alpha_n f(a_n) = 0_F$

$\Rightarrow f(\alpha_1 a_1 + \dots \alpha_n a_n) = 0_F = f(0_E)$

et d'après l'injectivité de f, on obtient $\alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_n a_n = 0_E$

donc la famille $\{a_1, \dots, a_n\}$ est un système de vecteurs linéairement dépendants.

(3) $\Rightarrow$) Supposons que $\{f(a_1), \dots, f(a_n)\}$ est libre ds F,

Alors on a déja montré que $\{a_1, \dots, a_n\}$ est libre ds E.

Montrons $\text{vect}\{a_1, \dots, a_n\} \cap \text{Ker} f = \{0_E\}$.

Soit $u \in \text{vect}\{a_1, \dots, a_n\} \cap \text{Ker} f$

$\Rightarrow u \in \text{vect}\{a_1, \dots, a_n\}$ et $u \in \text{Ker} f$

$\exists \alpha_1, \dots, \alpha_n \in K$, tq $\alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_n a_n = u$

et $f(u) = 0_F$

Donc $f(u) = f(\alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_n a_n) = 0_F$

$\Rightarrow \alpha_1 f(a_1) + \dots + \alpha_n f(a_n) = 0_F$

Puisque $\{f(a_1), \dots, f(a_n)\}$ est libre

alors $\alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0_K$.

Donc $u = 0 . a_1 + \dots + 0 a_n = 0_E$

D'où $\text{vect}\{(a_1, \dots, a_n)\} \cap \text{Ker} f = \{0_E\}$.

$\Leftarrow$) Supposons que $\{a_1, \dots, a_n\}$ est libre ds E et $\text{vect}\{a_1, \dots, a_n\} \cap \text{Ker} f = \{0_E\}$

et montrons que $\{f(a_1), \dots, f(a_n)\}$ est libre ds F.

Soient $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in K$ tel que :

$\alpha_1 f(a_1) + \dots + \alpha_n f(a_n) = 0_F$

$\Rightarrow f(\alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_n a_n) = 0_F$

$\Rightarrow \alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_n a_n \in \text{Ker}(f)$

Or $\alpha_1 . a_1 + \dots + \alpha_n a_n \in \text{vect}\{a_1, \dots, a_n\}$

donc $\alpha_1 . a_1 + \dots + \alpha_n . a_n \in \text{vect}\{a_1, \dots, a_n\} \cap \text{Ker}(f)$

Puisque $\text{vect}\{a_1, \dots, a_n\} \cap \text{Ker}(f) = \{0_E\}$

alors : $\alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_n . a_n = 0_E$

Comme $\{a_1, \dots, a_n\}$ est libre.

alors $\alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$.

Donc : $\{f(a_1), \dots, f(a_n)\}$ est libre.

<u>Ex 5</u> $x \in \text{Ker}\, \varphi \Leftrightarrow \varphi(x) = 0$.

Soit $x \in \text{Ker}(f)$ alors $f(x) = 0_F$

tlq : $x \in \text{Ker}(g \circ f)$:

$g \circ f(x) = g(f(x)) = g(0_F) = 0_G$

ETUSUP .com

* $\mathrm{Im}(g\circ f) \subset \mathrm{Im}(g)$

$y \in \mathrm{Im}(\varphi) \Leftrightarrow \exists x \in A \,.\, y = \varphi(x)$ $\qquad \varphi : A \to B$

$g\circ f : E \to G$

Soit $z \in \mathrm{Im}\, g\circ f$ donc $\exists x \in E \mid g\circ f(x) = z$.

alors $z = g(f(x))$

donc $z = g(y)$ avec $y = f(x) \in F$

d'où $z \in \mathrm{Im}\, g$.

(b)- $\Rightarrow$ Soit $v \in \mathrm{Im} f \Rightarrow \exists u \in E$ tq $v = f(u)$

$g(v) = g(f(u)) = (g\circ f)(u)$

$= 0_G$

D'où $v \in \mathrm{Ker}(g)$

$\Leftarrow$ Supposons $\mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Ker}(g)$ et montrons $g\circ f = 0$

$\forall x \in E$: $(g\circ f)(x) = 0_G$?

$(g\circ f)(x) = g[f(x)]$

Or $f(x) \in \mathrm{Im}(f)$ donc $f(x) \in \mathrm{Ker}(g)$.

d'où $g[f(x)] = 0 \Rightarrow (g\circ f)(x) = 0_G$.

(c)- Soit $y \in f(\mathrm{Ker}(g))$

c-à-d, $\exists x \in \mathrm{Ker}(g)$ tel que $y = f(x)$

Mq : $y \in \mathrm{Ker}(g)$, c-à-d, Mq $g(y) = 0$.

$g(y) = g(f(x)) = (g\circ f)(x)$

$= f\circ g(x) = f[g(x)]$

Or $x \in \mathrm{Ker}\, g \Rightarrow g(x) = 0$.

$f[g(x)] = f(0) = 0$.

d'où $g(y) = 0 \Rightarrow y \in \mathrm{Ker}(g)$.

+ Soit $z \in f(\mathrm{Im}\, g)$

donc $\exists x \in \mathrm{Im}\, g$ tel que $f(y) = z$

Mq : $z \in \mathrm{Im}\, g$, c-à-d $z = g(\ldots)$

$y \in \mathrm{Im}\, g$ donc $\exists x \in E$ tel que $g(x) = y$

alors $z = f(y) = f(g(x)) = (f\circ g)(x)$

$= (g\circ f)(x) = g(f(x)) \in \mathrm{Im}\, g$.

(9).- On a f est un endomorphisme de E,

donc pr montrer qu'il est automorphisme, il suffit de voir qu'il est injective.

Soit $x \in \mathrm{Ker}(f)$, Mq : $x = 0_E$.

$x \in \mathrm{Ker}(f) \Rightarrow f(x) = 0_E$

$f^2(x) = (f\circ f)(x) = f[f(x)] = f(0_E) = 0_E$

Or $f^2 + f + id_E = 0$

$\Rightarrow (f^2 + f + id_E)(x) = 0_E$

ETUSUP .com

$\underbrace{f(x)}_{y} + \underbrace{f(x)}_{y} + x = 0_E$, d'où $x = 0_E$

d'où $\ker(f) = 0_E$ et f injectif.

2ème méthode :

pr montrer que f est bijective, on va montrer que :

$\forall y \in E, \exists! x \in E$ tel que : $f(x) = y$.

Cherchons x en fonction de y :

On a : $(f \circ f)(x) + f(x) + x = 0$

Car $f \circ f + f + id_E = 0$.

alors, $f[f(x)] + f(x) + x = 0$.

$\Rightarrow f(y) + y + x = 0$

$\Rightarrow \boxed{x = -f(y) - y}$

D'où, l'unicité et l'existance de x.

De plus, $f^{-1}(y) = x = -f(y) - y$

c-à-d :

$\boxed{f^{-1} = -f - id_E}$

3ème méthode :

pr montrer que f est bijective, il suffit de montrer qu'il existe une application $g : E \to E$, tel que $g \circ f = id_E$ et $f \circ g = id_E$

Cherchons donc g qui vérifie ceux-ci :

On a : $f \circ f + f + id_E = 0$

$f \circ (\ldots) - id_E = ?$

$-f \circ f - f = id_E$

$f \circ (-f) - f \circ id_E = id_E$

$f \circ (-f) + f \circ (-id_E) = id_E$

$f \circ (-f - id_E) = id_E$

donc $\exists g = -f - id_E$ tel que $f \circ g = id_E$

Vérifions que : $g \circ f = id_E$.

$g \circ f = (-f - id_E) \circ f = -f \circ f - id_E \circ f$

$= -f \circ f - f = id_E$

D'où : $f^{-1} = g = -f - id_E$.

Ex 6

$$A_{\theta_1} \cdot A_{\theta_2} = \begin{pmatrix} \cos\theta_1 & -\sin\theta_1 \\ \sin\theta_1 & \cos\theta_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta_2 & -\sin\theta_2 \\ \sin\theta_2 & \cos\theta_2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2 & -\cos\theta_1\sin\theta_2 - \sin\theta_1\cos\theta_2 \\ \sin\theta_1\cos\theta_2 + \cos\theta_1\sin\theta_2 & -\sin\theta_1\sin\theta_2 \quad \cos\theta_1\cos\theta_2 \end{pmatrix}$$

ETUSUP .com

$$= \begin{pmatrix} \cos(\theta_1+\theta_2) & -\sin(\theta_1+\theta_2) \\ \sin(\theta_1+\theta_2) & \cos(\theta_1+\theta_2) \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \boxed{A_{\theta_1} \cdot A_{\theta_2} = A_{\theta_1+\theta_2}}$$

Supposons que la formule est vraie pr n et on montre qu'elle est vraie pr $(n+1)$.

$$A_{\theta_1} \cdot A_{\theta_2} \cdots A_{\theta_n} \cdot A_{\theta_{n+1}} = (A_{\theta_1} \cdots A_{\theta_n}) \cdot A_{\theta_{n+1}}$$

$$= A_{\underbrace{\theta_1+\dots+\theta_n}_{\theta'}} \cdot A_{\theta_{n+1}}$$

$$= A_{\theta'} \cdot A_{\theta_{n+1}}$$

$$= A_{\theta' + \theta_{n+1}}$$

$$= A_{\theta_1+\dots+\theta_n+\theta_{n+1}}$$

2)- En déduire que A_θ est inversible

Remarquons d'abord,

$A_0 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$ = matrice unité d'ordre 2

Cherchons une matrice $B \in M_2(\mathbb{R})$ tel que,

$A_\theta \cdot B = B \cdot A_\theta = I_2$

$A_\theta \cdot A_{\theta'} = A_{\theta+\theta'}$

On a, $A_\theta \cdot A_{-\theta} = A_0 = I_2$

Donc $B = A_{-\theta}$

d'où A_θ est inversible et son inverse est $(A_\theta)^{-1} = A_{-\theta} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$

Déf, 1) Ds $\mathbb{R}$: $a \neq 0$, $n \in \mathbb{Z}$ $n \leq 0$

$$a^n = (a^{-1})^{-n} = \underbrace{a^{-1} \times \dots \times a^{-1}}_{-n \text{ fois}}$$

2) Ds $M_n(K)$, A inversible et $n \leq 0$

$$A^n = (A^{-1})^{-n} = \underbrace{A^{-1} \times \dots \times A^{-1}}_{-n \text{ fois}}$$

3)- Calculons $(A_\theta)^n$ pr $n \in \mathbb{N}^*$

$$(A_\theta)^n = \underbrace{A_\theta \cdot A_\theta \dots A_\theta}_{n \text{ fois}} = A_{\underbrace{\theta+\theta+\dots+\theta}_{n \text{ fois}}} = A_{n\theta}$$

$$\Longrightarrow \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} \cos n\theta & -\sin n\theta \\ \sin n\theta & \cos n\theta \end{pmatrix}$$

- Calculons $(A_\theta)^n$ pr $n \leq 0$.

$$(A_\theta)^n = (A_\theta^{-1})^{-n} = (A_{-\theta})^{-n} = A_{-n(-\theta)} = A_{n\theta}$$

Ex 7

1) $0 \in E$, $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Si $a = b = c = 0 \Rightarrow M(a,b,c) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in E$

- Soient $M(a,b,c)$ et $M'(a',b',c') \in E$

ETUSUP .com

• $M(a,b,c)+M(a',b',c') = \begin{pmatrix} a & -c & -b \\ b & a & -c \\ c & b & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a' & -c' & -b' \\ b' & a' & -c' \\ c' & b' & a' \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} a+a' & -(c+c') & -(b+b') \\ b+b' & a+a' & -(c+c') \\ c+c' & b+b' & a+a' \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} a'' & -c'' & -b'' \\ b'' & a'' & -c'' \\ c'' & b'' & a'' \end{pmatrix} = M(a'',b'',c'') \in E$

$M(a,b,c)+M(a',b',c') = M(a+a', b+b', c+c')$

• Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ et $M(a,b,c) \in E$.

$\lambda . M(a,b,c) = \lambda \begin{pmatrix} a & -c & -b \\ b & a & -c \\ c & b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a & -\lambda c & -\lambda b \\ \lambda b & \lambda a & -\lambda c \\ \lambda c & \lambda b & \lambda a \end{pmatrix} = M(\lambda a, \lambda b, \lambda c)$

$\lambda . M(a,b,c) = M(\lambda a, \lambda b, \lambda c)$.

donc E est un e.v sur $\mathbb{C}$.

• cherchons d'abord une famille génératrice de E.

Soit $M(a,b,c) \in E$

$M(a,b,c) = \begin{pmatrix} a & -c & -b \\ b & a & -c \\ c & b & a \end{pmatrix}$

$= a \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{I} + b \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}_{J} + c \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{K}$

Donc $M(a,b,c)$ est une combinaison linéaire de $\{I, J, K\}$.

On remarque que I, J et K appartiennent à E car $I = M(1,0,0) \in E$

et $J = M(0,1,0) \in E$ et $K = M(0,0,1) \in E$

Donc $\{I, J, K\}$ engendre E.

* On montre que $\{I, J, K\}$ est libre.

Soit $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$ tel que : $\alpha I + \beta J + \gamma K = 0_E$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} \alpha & -\gamma & -\beta \\ \beta & \alpha & -\gamma \\ \gamma & \beta & \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0$.

donc $\{I, J, K\}$ est libre.

d'où $\{I, J, K\}$ est une base de E.

$\dim E = 3$ $\quad (\dim \mathcal{M}_3(\mathbb{C}) = 3 \times 3 = 9)$

2) * E.s.e.v de $M_3(\mathbb{C})$ (déjà fait)

* E sous-anneau de $M_3(\mathbb{C})$:

• E sous-groupe du groupe $(M_3(\mathbb{C}), +)$ (déjà vérifié)

• $\forall M, M' \in E$: $MM' \in E$

ETUSUP .com

Soit $M(a,b,c)$ et $M(a',b',c')$ deux éléments qcq de E, faisons leur produit.

$$M(a,b,c)\times M(a',b',c') = \begin{pmatrix} a & -c & -b \\ b & a & -c \\ c & b & a \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a' & -c' & -b' \\ b' & a' & -c' \\ c' & b' & a' \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} aa'-cb'-bc' & -ac'-ca'-bb' & -ab'+cc'-ba' \\ ab'+ab'-cc' & -cb'+aa'-cb' & -bb'-ac'-ca' \\ a'c+bb'+ac' & -cc'+a'b+ab' & -cb'-c'b+aa' \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a'' & -c'' & -b'' \\ b'' & a'' & -c'' \\ c'' & b'' & a'' \end{pmatrix} = M(a'',b'',c'') \in E.$$

$M(a,b,c)\times M(a',b',c') = M(aa'-b'c-bc', a'b+ab'-cc', a'c+bb'+ac)$

d'où la stabilité de E pr la multiplication.

*) Vérifions que la multiplication est commutative ds E.

$M(a',b',c')\times M(a,b,c) = M(a'a-bc'-b'c, ab'+a'b-c'c, ac'+b'b+a'c)$

$= M(a,b,c)\times M(a',b',c')$

Ex8. $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & & 1 & 0 \\ 0 & & & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & & & & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & & & & \vdots \\ 1 & & & & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & & 1 \end{pmatrix} = I_n$

donc A est inversible et son inverse est A

$\boxed{A^{-1} = A}$

Ex9. Question N°0 : Calculer tout d'abord l'image $f(u)$ d'un vecteur qcq $u=(x,y,z)\in E$

* 1ère méthode : Calcul linéaire.

$u = (x,y,z) = xe_1 + ye_2 + ze_3$

$\Rightarrow f(u) = x f(e_1) + y f(e_2) + z f(e_3)$

$= x(-7e_1 - 6e_2 - 12e_3) + y(3e_1 + 2e_2 + 6e_3) + z(3e_1 + 3e_2 + 5e_3)$

$= (-7x + 3y + 3z)e_1 + (-6x + 2y + 3z)e_2 + (-12x + 6y + 5z)e_3$

$\Rightarrow \boxed{f(x,y,z) = (-7x+3y+3z,\ -6x+2y+3z,\ -12x+6y+5z)}$

* 2ème méthode : Calcul matriciel

$u = (x,y,z)$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

$f(u) = (x',y',z')$, $Y = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$

$\boxed{Y = A.X}$

$Y = A.X \Rightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & 3 & 3 \\ -6 & 2 & 3 \\ -12 & 6 & 5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7x+3y+3z \\ -6x+2y+3z \\ -12x+6y+5z \end{pmatrix}$

d'où $f(x,y,z) = (-7x+3y+3z,\ -6x+2y+3z,\ -12x+6y+5z)$.

ETUSUP .com

1) $\ker(\underbrace{f+id_E}_{g}) = ?$

$g = f + id_E \Rightarrow g(x,y,z) = f(x,y,z) + (x,y,z)$

$= (-7x+3y+3z, -6x+2y+3z, -12x+6y+5z) + (x,y,z)$

$= (-6x+3y+3z, -6x+3y+3z, -12x+6y+6z)$

$\ker(g) = \{u \in E \,/\, g(u) = 0\}$

Soit $u = (x,y,z)$

$g(u) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -6x+3y+3z = 0 \\ -6x+3y+3z = 0 \\ -12x+6y+6z = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow -6x+3y+3z = 0 = -2x+y+z$

$\ker(g) = \{u = (x,y,z) \,/\, -2x+y+z = 0\}$

$-2x+y+z = 0 \Rightarrow z = 2x-y$

donc $u = (x, y, 2x-y)$

$= x(1,0,2) + y(0,1,-1) = xa_1 + ya_2$

de plus $\{a_1, a_2\}$ est une famille libre.

donc $\{a_1, a_2\}$ est une base de $\ker(g)$ et $\dim \ker(g) = 2$.

3) $\ker(f - 2id_E) = ?$

Soit $h = f - 2id_E = f(x,y,z) - 2(x,y,z)$

$= (-7x+3y+3z, -6x+2y+3z, -12x+6y+5z) - (2x, 2y, 2z)$

$= (-9x+3y+3z, -6x+3z, -12x+6y+3z)$

$\ker(h) = \{u \in E \,/\, h(u) = 0\}$

Soit $u = (x,y,z) \in \ker(h)$, $h(u) = 0$.

$\Rightarrow \begin{cases} ① \; -9x+3y+3z = 0 \\ ② \; -6x+3z = 0 \\ ③ \; -12x+6y+3z = 0 \end{cases}$

$① - ③ = 3x - 3y = 0 \Rightarrow x = y$

$-6x+3z = 0 \Rightarrow z = 2x$

donc $u = (x, x, 2x) = x(1,1,2)$

donc $\ker(f - 2id_E) = \{x(1,1,2) \,/\, x \in \mathbb{R}\}$

d'où $(1,1,2)$ une base de $\ker(f - 2id_E)$

3) - Montrons que : $\{a_1, a_2, a_3\}$ est une base de E

On montre que $\{a_1, a_2, a_3\}$ est libre

Soit $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tq

$(\alpha, 0, 2\alpha) + (0, \beta, -\beta) + (\gamma, \gamma, 2\gamma) = (0,0,0)$

$\Leftrightarrow \begin{cases} +\alpha + \gamma = 0 & \Leftrightarrow \alpha = -\gamma \\ \beta + \gamma = 0 & \Leftrightarrow \beta = -\gamma \\ 2\alpha - \beta + 2\gamma = 0 \end{cases}$ $\quad E = \dim 3$

② $= -2\gamma - \beta + 2\gamma = 0 \Leftrightarrow -\beta = \gamma = \alpha = 0$ donc libre.

ETUSUP .com

De plus on a : $\mathrm{card}\{a_1, a_2, a_3\} = 3 = \dim E$. d'où $\{a_1, a_2, a_3\}$ est une base de E.

(1) - On a : $P = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} a_1 & a_2 & a_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{array}$

$a_1 = (1,0,2) = (1,0,0) + 2(0,0,1) = e_1 + 2e_3$

$a_2 = (0,1,-1) = (0,1,0) - (0,0,1) = e_2 - e_3$

$a_3 = (1,1,2) = (1,0,0) + (0,1,0) + 2(0,0,1) = e_1 + e_2 + 2e_3$.

donc : $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

Calculons P^{-1} :

1ère méthode : (très longue)

$P^{-1} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{pmatrix}$

$P \cdot P' = I_3 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} a+a'' & b+b'' & c+c'' \\ a'+a'' & b'+b'' & c'+c'' \\ 2a-a'+2a'' & 2b-b'+2b'' & 2c-c'+2c'' \end{pmatrix}$

trois systèmes linéaires :

$\begin{cases} a+a'' = 1 \\ a'+a'' = 0 \\ 2a-a'+2a'' = 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{a = ?, \quad a' = ?, \quad a'' = ?}$

$\begin{cases} b+b'' = 0 \\ b'+b'' = 1 \\ 2b-b'+2b'' = 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{b = ?, \quad b' = ?, \quad b'' = ?}$

$\begin{cases} c+c'' = 0 \\ c'+c'' = 0 \\ 2c-c'+2c'' = 1 \end{cases} \Rightarrow \boxed{c = ?, \quad c' = ?, \quad c'' = ?}$

2ème méthode : P' est la matrice de passage de B' à B. $P^{-1} = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix} \begin{array}{c} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{array} \\ e_1 \; e_2 \; e_3 \end{array}$

$\begin{cases} a_1 = e_1 + 2e_3 \\ a_2 = e_2 - e_3 \\ a_3 = e_1 + e_2 + 2e_3 \end{cases}$, cherchons e_1, e_2 et e_3 en fct de a_1, a_2 et a_3.

$(1)-(3) \Rightarrow a_1 - a_3 = -e_2 \Rightarrow \boxed{e_2 = -a_1 + a_3}$

$(2) \Rightarrow a_2 = -a_1 + a_3 - e_3 \Rightarrow \boxed{e_3 = -a_1 - a_2 + a_3}$

$(1) \Rightarrow a_1 = e_1 + 2(-a_1 - a_2 + a_3)$

$\Rightarrow e_1 = a_1 - 2(-a_1 - a_2 + a_3) \Rightarrow \boxed{e_1 = 3a_1 + 2a_2 - 2a_3}$

donc : $P^{-1} = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{c} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{array} \\ e_1 \quad e_2 \quad e_3 \end{array}$ (on vérifie $P^{-1} \cdot P = I_3$)

3ème méthode : Soit $x \in E$; $\begin{cases} x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3 \\ x = x_1' e_1 + x_2' e_2 + x_3' e_3 \end{cases}$

$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, $X' = \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix}$, $X = PX'$, $X' = P^{-1}X$.

$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1' + x_3' \\ x_2' + x_3' \\ 2x_1' - x_2' + 2x_3' \end{pmatrix}$

$\begin{cases} x_1 = x_1' + x_3' \\ x_2 = x_2' + x_3' \\ x_3 = 2x_1' - x_2' + 2x_3' \end{cases}$

ETUSUP .com

$(1)-(2) \Rightarrow x_1 - x_2 = x_1' - x_2' \Rightarrow x_1' = x_1 - x_2 + x_2'$

$(1) \Rightarrow x_1 = (x_1 - x_2 + x_2') + x_3'$

$\Rightarrow 0 = -x_2 + x_2' + x_3'$

$\Rightarrow x_3' = x_2 - x_2'$

$(3) \Rightarrow x_3 \Rightarrow x_3 = 2(x_1 - x_2 + x_2') - x_2' + 2(x_2 - x_2')$

$\Rightarrow x_3 = 2x_1 - 2x_2 + 2x_2' - x_2' + 2x_2 - 2x_2'$

$x_3 = 2x_1 - x_2'$

$\boxed{x_2' = 2x_1 - x_3}$

$x_1' = x_1 - x_2 + x_2' = x_1 - x_2 + (2x_1 - x_3)$

$\boxed{x_1' = 3x_1 - x_2 - x_3}$

$x_3' = x_2 - x_2' = x_2 - (2x_1 - x_3)$

$\boxed{x_3' = -2x_1 + x_2 + x_3}$

$X' = P^{-1} \cdot X$, on cherche P^{-1}.

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{remplir} \\ \text{cette} \\ \text{matrice} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & +1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

5. $M(f, B') = ?$

$$M(f, B') = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} & ? & \end{pmatrix} \begin{array}{c} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{array} \\ f(a_1)\ f(a_2)\ f(a_3) \end{array}$$

On a : $\{a_1, a_2\}$ une base de $\ker(f + id_E)$ Donc, $f(a_1) + a_1 = 0 \Rightarrow \boxed{f(a_1) = -a_1}$

$\boxed{f(a_2) = -a_2}$

On a $\{a_3\}$ une base de $\ker(f - 2id_E)$ Donc, $f(a_3) - 2a_3 = 0 \Rightarrow \boxed{f(a_3) = 2a_3}$

$$A' = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$f(a_1) = -a_1 = -a_1 + 0a_2 + 0a_3$

$f(a_2) = 0a_1 - a_2 + 0a_3$

$f(a_3) = 0a_1 + 0a_2 + 2a_3$

$\Rightarrow f(a_3) = 2a_3 = (2, 2, 4) = 2e_1 + 2e_2 + 4e_3$

Rmq : $$M(f, B', B) = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{array}{c} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{array} \\ f(a_1)\ \ f(a_3) \end{array}$$

2ème méthode : (bcq de calculs!)

$A' = P^{-1} \cdot A \cdot P$

$$= \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -7 & 3 & 3 \\ -6 & 2 & 3 \\ -12 & 6 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Rmq : Soit $f \in \mathcal{L}_K(E)$, supposons qu'il $\exists$ une base $B' = \{a_1, \dots, a_n\}$ tq :

$f(a_1) = \lambda_1 a_1$

$\vdots$

$f(a_n) = \lambda_n a_n$

$$\Rightarrow \text{Alors } M(f, B') = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix} \begin{array}{c} a_1 \\ \\ a_n \end{array} \\ f(a_1)\ \ f(a_n) \end{array}$$

ETUSUP .com

estime matrice diagonale. La base $\{a_1, \dots, a_n\}$ est formée de vecteurs propre de f.

$(f(a) = \lambda a)$ valeur propre.

⑥. $(A')^n = \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$ juste pr une matrice diagonale.

• On a. $A' = P^{-1}.A.P$, $A = P^{-1}.A'.P$

$$A^n = (P^{-1}.A'.P)^n = \underbrace{(P^{-1}.A'.P)\times(P^{-1}.A'.P)\times\dots\times(P^{-1}.A'.P)\times(P^{-1}.A.P)}_{n \text{ fois}}$$

$$= \underbrace{P^{-1}A'\times\dots\times A'P}_{n \text{ fois}} \Longrightarrow \boxed{A^n = P^{-1}.(A')^n P}$$

$$A^n = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$; on fait le calcul

⑦. <u>1ère méthode</u>: $A = M(f, B)$

Pr montrer que A est inversible, il suffit de montrer que l'endomorphisme f est bijective, ou encore que f est injective.

Soit $u = (x, y, z) \in \operatorname{Ker} f$. $\Longleftrightarrow f(u) = 0_E$

$(-7x + 3y + 3z, -6x + 2y + 3z, -12x + 6y + 5z) = (0, 0, 0)$

$$\begin{cases} -7x + 3y + 3z = 0 \\ -6x + 2y + 3z = 0 \\ -12x + 6y + 5z = 0 \end{cases}$$ $\Rightarrow$ après le calcul on trouve: $x = y = z = 0 \Rightarrow u = 0_E$.

• On peut simplifier ce calcul ds la base B':

$\operatorname{Ker}(f) = \{0_E\}$?

Soit $u \in \operatorname{Ker}(f)$, $u = x'a_1 + y'a_2 + z'a_3$

$u \in \operatorname{Ker}(f) \Leftrightarrow f(u) = 0 \Leftrightarrow x' f(a_1) + y' f(a_2) + z' f(a_3) = 0$

$\Leftrightarrow x'(-a_1) + y'(-a_2) + z'(2a_3) = 0 \Rightarrow -x' a_1 - y' a_2 + 2z' a_3 = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} -x' = 0 \\ -y' = 0 \\ 2z' = 0 \end{cases} \Rightarrow x' = y' = z' = 0. \Rightarrow u = 0_E.$$

<u>2ème méthode</u>:

$u = x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3$

$y = f(u) = y_1 e_1 + y_2 e_2 + y_3 e_3$

$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$

$f(u) = y \Longleftrightarrow \boxed{Y = AX}$, résoudre ce système et trouver A^{-1}

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & 3 & 3 \\ -6 & 2 & 3 \\ -12 & 6 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7x_1 + 3x_2 + 3x_3 \\ -6x_1 + 2x_2 + 3x_3 \\ -12x_1 + 6x_2 + 5x_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} ① \; y_1 = -7x_1 + 3x_2 + 3x_3 \\ ② \; y_2 = -6x_1 + 2x_2 + 3x_3 \\ ③ \; y_3 = -12x_1 + 6x_2 + 5x_3 \end{cases}$$

$-3 \times ② + ③ \Rightarrow 2x_1 - x_3 = 2y_2 + y_3 \Rightarrow 2x_2 - 2y_2 = y_3 + x_3$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = \dots \\ x_2 = \dots \\ x_3 = \dots \end{cases}$$

ETUSUP .com

$(AB)' = B'A'$

$$A' = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad (A')^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \lambda_n & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & & P_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 P_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n P_n \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = (P.A'.P^{-1})^{-1} = (P^{-1})^{-1}.(A')^{-1}.P^{-1} = P(A')^{-1}.P^{-1} = \dots$$

<u>Rmq</u>. $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$ est inversible $\Leftrightarrow \lambda_1 \neq 0, \dots, \lambda_n \neq 0$

$$D^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_1^{-1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n^{-1} \end{pmatrix}$$

8) - a)

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \\ z_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7x_n + 3y_n + 3z_n \\ -6x_n + 2y_n + 3z_n \\ -12x_n + 6y_n + 5z_n \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \\ z_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & 3 & 3 \\ -6 & 2 & 3 \\ -12 & 6 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}$$

$$\boxed{X_{n+1} = A X_n}$$

b). $X_1 = AX_0$, $X_2 = A X_1 = A(A.X_0) = A^2 X_0$.

Par récurrence, si $X_n = A^n.X_0$, Alors $X_{n+1} = A.X_n = A(A^n.X_0) = A^{n+1}.X_0$

d'où, $\boxed{X_n = A^n.X_0}$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

d'autre part, d'après la question précédente : $A^n = P.(A')^n.P^{-1}$

on trouve après le calcul

$$A^n = \begin{pmatrix} 3.(-1)^n - 2^{n+1} & (-1)^{n+1} + 2^n & 2(-1)^n - 2^{n+1} \\ 2(-1)^n - 2^{n+1} & 2^n & 2(-1)^n - 2^{n+1} \\ -2(-1)^n - 2^{n+1} & (-1)^n - 2^n & (-1)^{n+1} + 2^{n+1} \end{pmatrix}$$

pr $n = 0$

$$A^0 = I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

pr $n = 1$, $A^1 = A$ (à vérifier)

$X_n = A^n.X_0$

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \cdot \end{pmatrix}}_{A^n} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$$

$x_n = (3(-1)^n - 2^{n+1})x_0 + ((-1)^{n+1} + 2^n)y_0 + (2(-1)^n - 2^{n+1})z_0$

$y_n =$

$z_n =$

ETUSUP .com

Ex 1),

1) $A = a\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{I = I_4} + b\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{J}$

$\boxed{A = aI + bJ}$

2) $J^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$J^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $J^4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

3) - $(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} C_n^k a^n \cdot b^{n-k} \in \mathbb{R}$

- Si $\boxed{AB = BA}$, $(A+B)^n = \sum_{i=0}^{n} C_n^k A^k \cdot B^{n-k}$ ds $M_{n,k}$

Ex: $(A+B)^2 = (A+B)(A+B) = A(A+B) + B(A+B) = A^2 + AB + BA + B^2$

Si de plus $AB = BA$, alors $AB = BA$ alors $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$

- $A^n = (aI + bJ)^n$?

Les matrices aI et bJ commutent car : $aI \times bJ = abJ$ et $bJ \times aI = baJ = abJ$

Donc, on peut appliquer la formule de Binôme.

$A^n = (aI + bJ)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k (aI)^{n-k} (bJ)^k$

or : $(aI)^{n-k} = a^{n-k} \cdot I^{n-k} = a^{n-k} \cdot I$ et $(bJ)^k = b^k \cdot J^k$.

$\Rightarrow A^n = \sum_{j=1}^{n} C_n^k \cdot a^{n-k} \cdot b^k \cdot J^k$

$A^n = C_n^0 a^n \cdot b^0 \cdot J^0 + C_n^1 a^{n-1} \cdot b \cdot J + C_n^2 a^{n-2} \cdot b^2 \cdot J^2 + C_n^3 a^{n-3} b^3 \cdot J^3 + C_n^4 a^{n-4} \cdot b^4 J^4$
$+ \dots + C_n^n a^0 b^n \cdot J^n$.

or $J^4 = 0 \Rightarrow \forall k \geq 4$, $J^k = 0$.

$\Rightarrow A^n = a^n I + (n \cdot a^{n-1} \cdot b) J + \frac{n(n-1)}{2} a^{n-2} \cdot b^2 J^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{6} a^{n-3} b^3 J^3$.

Remplaçons I, J, J^2 et J^3 par leurs valeurs, on obtient :

$A^n = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma & \mu \\ 0 & \alpha & \beta & \gamma \\ 0 & 0 & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$ avec : $\alpha = a^n$, $\beta = na^{n-1}b$, $\gamma = \frac{n(n-1)}{2} a^{n-2} \cdot b^2$ et $\mu = \frac{n(n-1)(n-2)}{6} a^{n-3} \cdot b^3$.

Ex 10. Soit $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ tq : $\alpha_1 P_1 + \alpha_2 P_2 + \alpha_3 P_3 = 0_E$

$\Leftrightarrow \alpha_1 + \alpha_2(1+x) + \alpha_3(1-x^2) = 0$

$\Leftrightarrow (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) + \alpha_2 x - \alpha_3 x^2 = 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \\ \alpha_2 = 0 \\ \alpha_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$.

$\Rightarrow \{P_1, P_2, P_3\}$ est libre

or $\dim \mathbb{R}_2[x] = 3 = \text{card}\{P_1, P_2, P_3\}$

2ème méthode pr montrer que (P_1, P_2, P_3) est libre, il suffit de montrer que $\det(P_1, P_2, P_3) \neq 0$.

$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 \\ x \\ x^2 \end{matrix} = +(-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$

ETUSUP .com

2)-a $M(u,B)$

$$M(u,B) = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} u(P_1) & u(P_2) & u(P_3) \end{matrix} \end{array}$$

$u(P_1) = (2-x^2)P_1' + 2xP_1 = 2x$

Écrivons $2x$ ds la base (P_1, P_2, P_3)

$2x = 2(1+x) - 2 = 2P_2 - 2P_1$

$u(P_2) = (2-x^2)P_2' + 2xP_2$

$= (2-x^2) + 2x(1+x) = 2 - x^2 + 2x + 2x^2 = x^2 + 2x + 2$

$= \alpha P_1 + \beta P_2 + \gamma P_3$

$= \alpha + \beta(1+x) + \gamma(1+x^2) = \alpha + \beta + \beta x + \gamma - \gamma x^2$

$= (\alpha + \beta + \gamma) + \beta x - \gamma x^2 \Rightarrow \begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = 2 \Rightarrow \boxed{\alpha = 1} \\ \boxed{\beta = 2} \\ -\gamma = 1 \Leftrightarrow \boxed{\gamma = -1} \end{cases}$

Demi, on calcule, $u(P_3) = \dots = 2P_1 - 2P_2$

b)- 1ère méthode: on travaille dans la base canonique $(1, x, x^2)$

Soit $P = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$

Dans $\ker(u)$, $u(P) = 0$

$u(P) = (2-x^2)P' + 2xP = 0$

$= (2-x^2)(a_1 + 2a_2 x) + (2x)(a_0 + a_1 x + a_2 x^2)$

$= 2a_1 + 4a_2 x - a_1 x^2 - 2a_2 x^3 + 2a_0 x + 2a_1 x^2 + 2a_2 x^3 = 0$

$\begin{cases} 2a_1 = 0 \\ 4a_2 + 2a_0 = 0 \\ a_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{a_1 = 0}$

$\cancel{2a_2 + a_0 = 0 \Rightarrow \boxed{a_0 = -2a_2}}$

$\cancel{\ker\{u\} = \{a_0 \cdot 1 \,/\, a_0 \in \mathbb{K}\} = \text{Vect}\{1\}}$

$\cancel{\text{est de dim } 1}$

$\underbrace{\dim(\mathbb{R}_2[x])}_{3} = \underbrace{\dim \ker(u)}_{1} + \underbrace{\dim \operatorname{Im}(u)}_{2}$

$\Rightarrow P = (-2a_2) + 0 \cdot x + a_2 x^2$

$= a_2[-2 + x^2] \Rightarrow \ker(u) = \text{Vect}\{-2 + x^2\}$ est de dim 1.

2ème méthode: de la base (P_1, P_2, P_3)

$y = f(x)$

$Y = AX$ avec $Y = (y_1, y_2, y_3)$, $X = (x_1, x_2, x_3)$

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 + x_2 + 2x_3 \\ 2x_1 + 2x_2 - 2x_3 \\ -x_2 \end{pmatrix}$$

$X \in \ker(u) \Rightarrow Y = 0$.

$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 0 \\ -x_2 = 0 \Rightarrow \boxed{x_2 = 0} \end{cases}$

$2x_2 = 0 \Rightarrow \boxed{x_1 = x_3}$

ETUSUP .com

donc : $P = x_1 P_1 + x_2 P_2 + x_3 P_3 = x_1 P_1 + x_3 P_3 = x_1(P_1 + P_3)$

$\mathrm{Ker}(u) = \mathrm{Vect}\{(P_1, P_3)\}$.

• $\mathrm{Im}(u) = \{u(P) / P \in \mathbb{R}_2[x]\}$

Soit $Q \in \mathrm{Im}(u)$, $Q = aP_1 + bP_2 + cP_3$

$\exists P \in \mathbb{R}_2[x]$ tq : $u(P) = Q$, $P = a'P_1 + b'P_2 + c'P_3$

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} -2a' + b' + 2c' = a \\ 2a' + 2b' - 2c' = b' \\ -b' = c' \end{cases}$$ cherchons une relation entre a, b, c

on remarque $a + b + 3c = 0$. d'où $c = -\frac{(a+b)}{3}$

$$Q = \begin{pmatrix} a \\ b \\ -\frac{a+b}{3} \end{pmatrix} = aP_1 + bP_2 - \left(\frac{a+b}{3}\right)P_3$$
$$= a\underbrace{\left(P_1 - \frac{1}{3}P_3\right)}_{Q_1} + b\underbrace{\left(P_2 - \frac{1}{3}P_3\right)}_{Q_2}$$

Q_1 et Q_2 engendrent $\mathrm{Im}(u)$.

<u>2ème méthode</u>. $\{1, x, x^2\}$ base de $\mathbb{R}_2[x] \Rightarrow \mathrm{Im}(u)$ est engendré par : $\{u(1), u(x), u(x^2)\}$

Est-ce que $\{u(1), u(x), u(x^2)\}$ est libre ? Non (calculs).

On enlève par exemple $u(x^2) \Rightarrow \{u(1), u(x)\}$ base de $\mathrm{Im}(u)$.

3ème méthode, $\{P_1, P_2, P_3\}$ base de $\mathbb{R}_2[x] \Rightarrow \mathrm{Im}(u)$ engendré par $\{u(P_1), u(P_2), u(P_3)\}$.

ETUSUP .com

ETUSUP.com

Programmation
Cours
Informatique
Optique
Chimie
Algébre
Corrigés
Mathématiques
Travaux Pratiques
Electricité
Physique
Résumés
Analyse
Diapo
Exercices
Livres
Contrôles Continus
Langues
MTU
Mécanique
Thermodynamique
Multimedia
Divers
Economie
Travaux Dirigés
Droit
Chimie Organique

et encore plus..